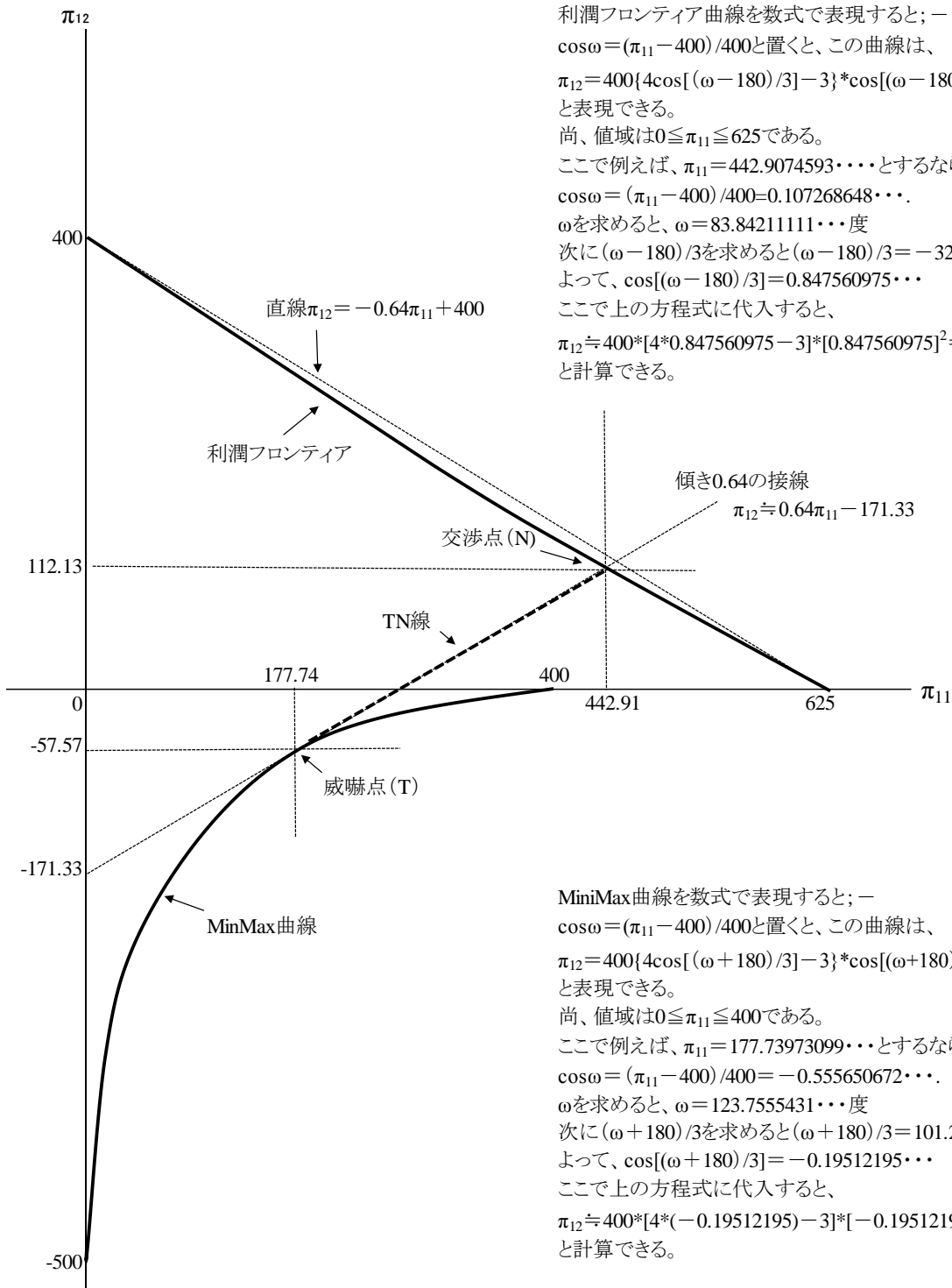


# 利潤フロンティア・MinMax 曲線の方程式

(コンダクタンス等の概念を使うとこれら方程式を算出できる)



利潤フロンティア曲線を数式で表現すると;  $-\cos\omega = (\pi_{11} - 400)/400$ と置くと、この曲線は、  
 $\pi_{12} = 400\{4\cos[(\omega - 180)/3] - 3\} * \cos[(\omega - 180)/3]^2$   
 と表現できる。  
 尚、値域は  $0 \leq \pi_{11} \leq 625$  である。  
 ここで例えば、 $\pi_{11} = 442.9074593 \dots$  とするなら、  
 $\cos\omega = (\pi_{11} - 400)/400 = 0.107268648 \dots$   
 $\omega$  を求めると、 $\omega = 83.84211111 \dots$  度  
 次に  $(\omega - 180)/3$  を求めると  $(\omega - 180)/3 = -32.05262963 \dots$  度  
 よって、 $\cos[(\omega - 180)/3] = 0.847560975 \dots$   
 ここで上の方程式に代入すると、  
 $\pi_{12} \doteq 400 * [4 * 0.847560975 - 3] * [0.847560975]^2 = 112.1341 \dots$   
 と計算できる。

MinMax 曲線を数式で表現すると;  $-\cos\omega = (\pi_{11} - 400)/400$ と置くと、この曲線は、  
 $\pi_{12} = 400\{4\cos[(\omega + 180)/3] - 3\} * \cos[(\omega + 180)/3]^2$   
 と表現できる。  
 尚、値域は  $0 \leq \pi_{11} \leq 400$  である。  
 ここで例えば、 $\pi_{11} = 177.73973099 \dots$  とするなら、  
 $\cos\omega = (\pi_{11} - 400)/400 = -0.555650672 \dots$   
 $\omega$  を求めると、 $\omega = 123.7555431 \dots$  度  
 次に  $(\omega + 180)/3$  を求めると  $(\omega + 180)/3 = 101.2518477 \dots$  度  
 よって、 $\cos[(\omega + 180)/3] = -0.19512195 \dots$   
 ここで上の方程式に代入すると、  
 $\pi_{12} \doteq 400 * [4 * (-0.19512195) - 3] * [-0.19512195]^2 = -57.5731 \dots$   
 と計算できる。

## コンダクタンス値の変化

尚、TN線に沿った減産におけるコンダクタンスの変化を見ておくと、 $k_{11}$ は、威嚇点における $k_{11} = 196/41 \doteq 4.78$ から、交渉点の $k_{11} = 25/41 \doteq 0.61$ まで漸減し、さらには交渉点で跳ね返され $\pi_{11}$ 軸との交点における $k_{11} \doteq 0.14$ まで連続的に低減していくのに対し:  $-k_{12}$ は、威嚇点における $k_{12} = -155/41 \doteq -3.78$ から、 $\pi_{11}$ 軸に接近するに連れ急減し、 $\pi_{11}$ 軸との交点( $P = 60, q_{11} \doteq 26.77, q_{12} \doteq 13.23$ )では $-\infty$ に達し、次には一挙に $+\infty$ に転じ、交渉点では $k_{12} = 16/41 \doteq 0.39$ となる。更には交渉点で跳ね返されて、TN線を逆戻りして $\pi_{11}$ 軸に至り( $P \doteq 93.9, q_{11} = 6.10, q_{12} = 0$ )、 $k_{12} = 0$ となり、この減産の過程で  $-3.78 < k_{12} < 0$ の範囲を除く全ての実数値を採ることになる。尚、 $-3.78 < k_{12} < 0$ の領域は威嚇点から接線に沿って左側の領域にあたる(但し、 $k_{12} \doteq 0$ となるのは接線を第三象限に延長した無限の彼方)。

## 威嚇点・交渉点の検証

### 威嚇点

TN 線の傾き 0.64 とすると、TN 線は  $\pi_{12}=0.64\pi_{11}+a$  と表せる。ここで、

$$\begin{aligned}\pi_{12}-0.64\pi_{11} &= (Pq_{12}-60q_{12})-0.64*(Pq_{11}-50q_{11}) \\ &= [(100-q_{11}-q_{12})q_{12}-60q_{12}]-0.64*[(100-q_{11}-q_{12})q_{11}-50q_{11}]\end{aligned}$$

となり、威嚇点は下記を連立させて解くことができる。

$$d(\pi_{12}-0.64\pi_{11})/dq_{11}=0$$

$$d(\pi_{12}-0.64\pi_{11})/dq_{12}=0$$

これを解くと、

$$q_{11}=49000/1681 \doteq 29.14932$$

$$q_{12}=24800/1681 \doteq 14.75312$$

$$P=100-q_{11}-q_{12}=2300/41 \doteq 56.09756$$

$$\pi_{11}=Pq_{11}-50q_{11}=12250000/68921 \doteq 177.73973$$

$$\pi_{12}=Pq_{12}-60q_{12}=3968000/68921 \doteq 57.57316$$

### 交渉点

威嚇点からの TN 線に沿っての利潤配分比 (TN 線が直線となる条件) は減産比でもある。

よって、企業 11 の減産数を  $x$  とすると、それぞれの供給数は次の様になる。

$$q_{11}=49000/1681-x$$

$$q_{12}=24800/1681-0.64x$$

両者の利潤合計は、

$$\begin{aligned}\pi_{11}+\pi_{12} &= (Pq_{11}-50q_{11})+(Pq_{12}-60q_{12}) \\ &= (100-49000/1681-x-24800/1681-0.64x)*(49000/1681-x)-50*(49000/1681-x) \\ &\quad + (100-49000/1681-x-24800/1681-0.64x)*(24800/1681-0.64x)-60*(24800/1681-0.64x)\end{aligned}$$

交渉点の条件は以下となる。

$$d(\pi_{11}+\pi_{12})/dx=0$$

これを解くと、

$$x=114980.4/9042.4352 \doteq 12.71564545$$

よって、

$$q_{11}=49000/1681-x=27625/1681 \doteq 16.43367$$

$$q_{12}=24800/1681-0.64x=11120/1681 \doteq 6.61510$$

$$P=100-q_{11}-q_{12}=3155/41 \doteq 76.95122$$

$$\pi_{11}=Pq_{11}-50q_{11}=30525625/68921 \doteq 442.90746$$

$$\pi_{12}=Pq_{12}-60q_{12}=7728400/68921 \doteq 112.13418$$

\*交渉点の算出もそれほど厄介ではないはずだが、どうも一般的には (以下、 $P=200-q$ 、単位コストは企業 1 が 100、企業 2 が 120 として)、

『再配分が不可能であれば、生産を一社に集中するというわけにはいかないが、この場合にも、もしある期は企業 1 だけが生産し、次の期には企業 2 だけが生産するというような協定が可能であるとすれば、企業 1 だけが生産する期の利潤は (2500, 0) となり、企業 2 だけが生産する期の利潤は (0, 1600) となり (前の数字が企業 1、後の数字が企業 2 の利潤を示す)、数期間にわたってこのようなかたちで交互に生産を行った場合の 1 期当たりの平均利潤フロンティアは

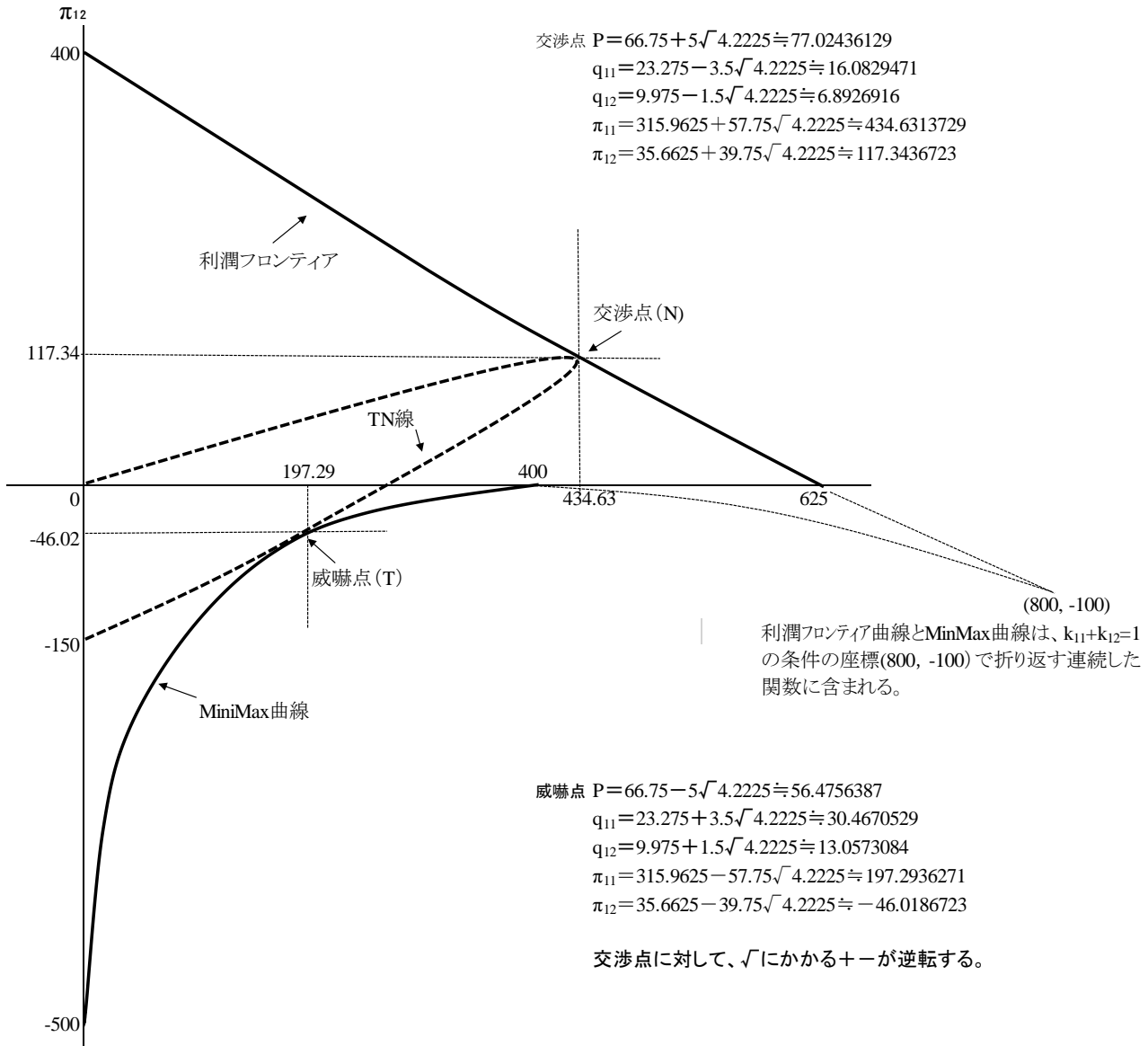
$$1600/2500*\pi_1+\pi_2=1600$$

という直線で示される。』(『現代経済学第 1 巻 価格理論 I』p. 281、今井賢一、宇沢弘文、小宮竜太郎、根岸隆、村上泰亮著、岩波書店、1971 年 11 月)

利潤フロンティアとの交点 (接点) の算出ができなかったようで、非現実的な前提を置き「平均利潤フロンティア」という直線で代替し、交渉点における利潤を (1785, 458) という利潤フロンティアの外側にある本来存在しないはずの領域での値としてしまっている。尚、威嚇点は正しく計算されている。

## TN線が曲線のケース（交渉点は交点ではなく接点）

以下は、企業 12 がシェア 30%維持の行動(シェア維持での減産の方が話がまとまり易いのでは?)を採った場合の軌跡（これも TN 線としておきます）を描いたものである。この図を見ると交渉点が交点ではなく接点であることが分かる。



TN(曲)線方程式

$$\pi_{12} = 3/7 * [(\pi_{11} - 175 \pm (30625 - 70\pi_{11})^{0.5})]$$

$30625 - 70\pi_{11} = 0$  となる  $\pi_{11}$  の最大値である  $\pi_{11} = 437.5$  を境にして上側の曲線は(交渉点あり)、

$$\pi_{12} = 3/7 * [(\pi_{11} - 175 + (30625 - 70\pi_{11})^{0.5})]$$

下側の曲線は(威嚇点あり)

$$\pi_{12} = 3/7 * [(\pi_{11} - 175 - (30625 - 70\pi_{11})^{0.5})]$$

\* 交渉点  $k_{11} = 2.65 - \sqrt{4.2225} \approx 0.59513$ ,  $k_{12} = -1.65 + \sqrt{4.2225} \approx 0.40487$

威嚇点  $k_{11} = 2.65 + \sqrt{4.2225} \approx 4.70487$ ,  $k_{12} = -1.65 - \sqrt{4.2225} \approx -3.70487$

\* 尚、シェア維持行動の場合、

企業 11 の利潤最大化条件は  $k_{11} = 0.7$  (シェアに等しい)、この時、 $k_{12} = 0.3 * (a - c_{11}) / (a + c_{11} - 2c_{12}) = 0.5$

企業 12 の利潤最大化条件は  $k_{12} = 0.3$  (シェアに等しい)、この時、 $k_{11} = 0.7 * (a - c_{12}) / (a + c_{12} - 2c_{11}) = 7/15 \approx 0.4666$  . .

企業 11 の利潤最大化の場合  $P = 75$ 、企業 12 の利潤最大化の場合  $P = 80$  と、それぞれの独占時の価格となる。

\* 但し、コンダクタンス等の概念を使わずには接点(交渉点・威嚇点)は算出できないはず。